

PACS numbers: 46.55.+d, 46.70.De, 62.20.Qp, 62.23.Kn, 68.35.Gy, 81.40.Jj, 81.70.Bt

## Рівновага шаруватого Cu/Ni/Cr-покриття під локальним навантаженням

І. П. Шацький<sup>1</sup>, М. В. Маковійчук<sup>1</sup>, Л. Я. Роп'як<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України,  
вул. Микитинецька, 3,  
76002 Івано-Франківськ, Україна

<sup>2</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,  
вул. Карпатська, 15,  
76019 Івано-Франківськ, Україна

Розроблено інженерну методику розрахунку напружено-деформованого стану й оцінювання міцності тришарового Cu/Ni/Cr-покриття плоского деталю за дії локального навантаження. Пара цупких хромового та нікелевого шарів розглядається як кусково-однорідна пластина, а податливий мідний шар підпорядковується Вінклеровій гіпотезі про пропорційність напружень і переміщень. Досліджено розподіл напружень у шаруватому покритті та визначено коефіцієнти запасу міцності залежно від механічних властивостей і товщини компонент. Загалом встановлено, що граничний стан неоднорідного покриття може визначатися не максимальним еквівалентним напруженням, а мінімальним коефіцієнтом запасу міцності.

The engineering methodology for calculating the stress-strain state and evaluating the strength of a three-layer chromium-nickel-copper coating of flat part under the action of the local load is developed. A pair of hard chromium and nickel layers is considered as a piecewise-homogeneous plate; the malleable copper layer is subject to Winkler's hypothesis of the proportionality between stress and displacement. The stress distribution in the layered coating is studied, and the safety factor is determined depending on the mechanical properties and thickness of the components. In general, as established, the limit state of an inhomogeneous coating could be determined not by the maximum equivalent stress, but by the minimum of the safety factor.

**Ключові слова:** нанокompозитні покриття, хромування, ніклювання, міднення, локальне навантаження, напружений стан, міцність.

**Key words:** nanocomposite coatings, chrome plating, nickel plating, copper plating, local loading, stressed state, strength.

per plating, local load, stress state, strength.

*(Отримано 7 травня 2022 р.; після доопрацювання — 20 лютого 2023 р.)*

## 1. ВСТУП

До численних способів поверхневого зміцнення металевих деталей і виробів належать ультразвукове ударне, фрикційне, лазерне оброблення тощо [1–3]. Окрему нішу займають методи нанесення на поверхню тонких покриттів, наділених функціями захисту від зношування та корозії, наприклад, електрохімічне хромування в електроліті [4–7], ніклювання [8] й оксидування [9–11], електроіскрове легування [12], йонно-плазмовий [13] і комбінований електронно-променевий [14] методи. Спираючись на теоретичні підходи на стадії вибору складу матеріалів [15–17] і враховуючи технологічну спадковість під час виготовлення [18–20], можна забезпечити функціонування виробів упродовж життєвого циклу [21].

Покриті деталі мають подовжений ресурс експлуатації в парах тертя за присутності агресивних середовищ [22–24]. Щоби добитися багатоцільового результату, для поліпшення поверхні деталю найчастіше застосовують функціонально градієнтні, зокрема композиційні та шаруваті, покриття з надтонкими компонентами нано- чи мікроструктури [25–28]. Прикладом такого мультифункціонального зміцнення є почергове міднення, ніклювання та хромування крицевого деталю. Тут кожний фрагмент виконує специфічну функцію:

- внутрішній шар із міді забезпечує добре зчеплення покриття з крицевою основою та катодний захист від корозії;
- проміжний шар із ніклю формує суцільну компоненту гладкого покриття, міцнішу за мідну;
- зовнішній шар із хрому є найбільш корозійнотривким за рахунок швидкої пасивації з утворенням оксидної плівки; висока твердість і малий коефіцієнт тертя забезпечують високу зносостійкість покриття, а інколи важливою є і декоративна функція хрому.

Нині достатньо розвинутими є моделі та методи механіки шаруватих покриттів з урахуванням зміни температури та процесу дифузії [29–31]. Заслужують на увагу також підходи до аналізу впливу тонких гнучких і композиційних покриттів на граничний стан пошкоджених пластинчастих [32–36] та оболонкових [37–41] конструкцій і крихких тіл з поверхневими тріщинами [42].

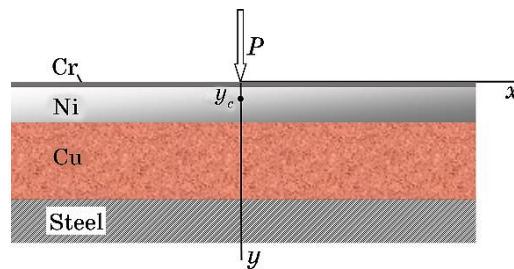
Окремий клас задач із сингулярним полем напружень становлять дослідження деформування шаруватих покриттів під локалізованим навантаженням. Навантаження такого типу зустріча-

ються за взаємочину поверхонь з абразивом або з продуктами зношування й окиснення, а також під час випробувань покриттів нано- та мікроіндентуванням [43, 44].

У тих випадках, коли достатньо цупке покриття відокремлюється від деталю податливим прошарком, для опису рівноваги покриття доцільно застосовувати теорію пластин (оболонок) на Вінклеровій основі. Це уможлиблює понизити вимірність континууму та навіть досягти аналітичних результатів. Приклади таких 1D-моделів наведено в статтях [45, 46] для крицевого деталю з  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -покриттям на алюмінієвому підшарі та в публікаціях [47, 48] для інфрачервоного фільтра з кремнієвим покриттям на шаруватій Si/SiO-структурі. Якщо у композиції Cu/Ni/Cr пару Ni/Cr вважати неоднорідною пластиною, а мідний фрагмент — податливим прошарком, то згадана схема розрахунку може претендувати на успіх. Така ідея слугує мотивацією нашого дослідження, спрямованого на розвиток одновимірного моделю розрахунку напруженого стану та граничної рівноваги тришарового покриття під локальним навантаженням.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛЬ ПОКРИТТЯ

Розглянемо елемент крицевої конструкції, на яку нанесено тонке покриття, що складається з внутрішнього мідного (Cu), проміжного нікелевого (Ni) та зовнішнього хромового (Cr) шарів (рис. 1). З точки зору механіки пара цупких хромового та нікелевого шарів розглядається як кусково-однорідна пластина, яка працює на вигин, а податливий мідний шар підпорядковується Вінклеровій гіпотезі про пропорційність напружень і пружних переміщень. Для простоти крицева основа припускається абсолютно цупкою. Механічний контакт між компонентами на поверхнях спряження вважається ідеальним. Композицію навантажено нормальною силою  $P$  [Н/м], рівномірно розподіленою вздовж прямої, перпенди-



**Рис. 1.** Схема тришарового Cu/Ni/Cr-покриття під локальним навантаженням.<sup>1</sup>

кулярної до площини рисунка. Крім того, припускаємо стан плоскої деформації ( $\varepsilon_z = 0$ ). Слід вивчити розподіл напружень у шаруватому покритті та встановити рівень допустимого локального навантаження.

Введемо систему Декартових координат з початком на поверхні та віссю  $Oy$ , спрямованою вглиб півпростору (рис. 1). За прийнятих припущень запишемо рівняння рівноваги двошарового кусково-однорідного покриття на пружній основі [49]:

$$D \frac{d^4 u_y}{dx^4} + k_y u_y = P \delta(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (1)$$

Тут  $u_y$  — компонента вектора пружнього переміщення нейтральної поверхні пластини;

$$D = \int_0^{h_{Cr}+h_{Ni}} \frac{E(y)}{1-\nu^2(y)} (y-y_C)^2 dy = \\ = \frac{E_{Cr}}{1-\nu_{Cr}^2} \left( \frac{(h_{Cr}-y_C)^3}{3} + \frac{y_C^3}{3} \right) + \frac{E_{Ni}}{1-\nu_{Ni}^2} \left( \frac{(h_{Cr}+h_{Ni}-y_C)^3}{3} - \frac{(h_{Cr}-y_C)^3}{3} \right) \quad (2)$$

— жорсткість на вигин;

$$y_C = \frac{\int_0^{h_{Cr}+h_{Ni}} \frac{E(y)}{1-\nu^2(y)} y dy}{\int_0^{h_{Cr}+h_{Ni}} \frac{E(y)}{1-\nu^2(y)} dy} = \frac{\frac{E_{Cr}}{1-\nu_{Cr}^2} \frac{h_{Cr}^2}{2} + \frac{E_{Ni}}{1-\nu_{Ni}^2} \left( \frac{(h_{Cr}+h_{Ni})^2}{2} - \frac{h_{Cr}^2}{2} \right)}{\frac{E_{Cr}}{1-\nu_{Cr}^2} h_{Cr} + \frac{E_{Ni}}{1-\nu_{Ni}^2} h_{Ni}} \quad (3)$$

— ордината розташування нейтральної поверхні;

$$k_y = \frac{E_{Cu}}{1-\nu_{Cu}^2} \frac{1}{h_{Cu}}$$

— коефіцієнт жорсткості мідної постелі;

$$E(y) = \begin{cases} E_{Cr}, & y \in (0, h_{Cr}), \\ E_{Ni}, & y \in (h_{Cr}, h_{Cr} + h_{Ni}), \end{cases} \quad \nu(y) = \begin{cases} \nu_{Cr}, & y \in (0, h_{Cr}), \\ \nu_{Ni}, & y \in (h_{Cr}, h_{Cr} + h_{Ni}). \end{cases}$$

— кусково-сталі функції;  $E_{Cr}$ ,  $E_{Ni}$ ,  $E_{Cu}$  — модулі Юнга, а  $\nu_{Cr}$ ,  $\nu_{Ni}$ ,  $\nu_{Cu}$  — Пуассонові коефіцієнти матеріалів покриття;  $h_{Cr}$ ,  $h_{Ni}$ ,  $h_{Cu}$  — товщини шарів;  $\delta(x)$  — Діракова функція.

На безмежності зусилля та моменти згасають:

$$D \frac{d^2 u_y}{dx^2} (\pm\infty) = 0, \quad D \frac{d^3 u_y}{dx^3} (\pm\infty) = 0. \quad (4)$$

Отже, крайова задача (1), (4) описує шукане поле вертикальних переміщень пластини-покриття на пружній основі.

Зауважимо, що у разі надтонкого хромового шару ( $h_{Cr} \ll h_{Ni}$ ) формули (2) та (3) спрощуються:

$$D \approx \frac{E_{Ni}}{1 - \nu_{Ni}^2} \frac{h_{Ni}^3}{12} + \frac{E_{Cr}}{1 - \nu_{Cr}^2} \frac{h_{Cr} h_{Ni}^2}{4},$$

$$y_C \approx \frac{h_{Ni}}{2} + h_{Cr} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{E_{Cr}}{1 - \nu_{Cr}^2} \frac{1 - \nu_{Ni}^2}{E_{Ni}} \right).$$

Ці вирази є уточненнями подібних результатів з праці [50].

### 3. РЕЗУЛЬТАТИ ТА АНАЛІЗА

Розв'язок задачі (1), (4) знайшли у вигляді:

$$u_y(x) = \frac{P}{8D\lambda_y^3} e^{-\lambda_y|x|} (\cos \lambda_y x + \sin \lambda_y |x|), \quad (5)$$

де  $\lambda_y = \sqrt[4]{k_y/4D}$  — коефіцієнт защемлення з розмірністю, оберненою до довжини.

Переміщенням (5) відповідає вигинальний момент у покритті

$$M(x) = -D \frac{d^2 u_y}{dx^2}(x) = \frac{P}{4\lambda_y} e^{-\lambda_y|x|} (\cos \lambda_y x - \sin \lambda_y |x|)$$

та контактне напруження на інтерфейсі Ni–Cu

$$\sigma(x) = -k_y u_y(x) = -\frac{P}{2} \lambda_y e^{-\lambda_y|x|} (\cos \lambda_y x + \sin \lambda_y |x|).$$

Напруження у шаруватому покритті обчислюються за формулами:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{E(y)}{1 - \nu^2(y)} \frac{M(x)}{D} (y - y_C) =$$

$$= \frac{E(y)}{1 - \nu^2(y)} \frac{y - y_C}{D} \frac{P}{4\lambda_y} e^{-\lambda_y|x|} (\cos \lambda_y x - \sin \lambda_y |x|), \quad y \in (0, h_{Cr} + h_{Ni}),$$

$$\sigma_y(x, y) = \sigma(x) \frac{y}{H}, \quad y \in (0, H),$$

де  $H = h_{Cr} + h_{Ni} + h_{Cu}$  — сумарна товщина трьох шарів.

Міцність кожного з шарів оцінимо за Мізесовим критерієм. Так, умовою міцності для пласкодеформованого хромового покриття буде

$$\sigma_{eq} \equiv \sqrt{(1 - \nu_{Cr} + \nu_{Cr}^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - (1 + 2\nu_{Cr} - 2\nu_{Cr}^2)\sigma_x\sigma_y} \leq [\sigma]_{Cr},$$

для нікелевого шару —

$$\sigma_{eq} \equiv \sqrt{(1 - \nu_{Ni} + \nu_{Ni}^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - (1 + 2\nu_{Ni} - 2\nu_{Ni}^2)\sigma_x\sigma_y} \leq [\sigma]_{Ni},$$

для мідної підкладинки —

$$\sigma_{eq} \equiv |\sigma_y| \leq [\sigma]_{Cu}.$$

Тут  $\sigma_{eq}$  — еквівалентне Мізесове напруження;  $[\sigma]_{Cr}$ ,  $[\sigma]_{Ni}$ ,  $[\sigma]_{Cu}$  — допустимі напруження для матеріалів композиційного покриття (а  $[\sigma] = \sigma_Y/n$ , де  $\sigma_Y$  — границя плинності, а  $n$  — коефіцієнт запасу).

Одержані результати дають можливість визначити величину допустимого навантаження, залежну від механічних і геометричних характеристик шаруватого покриття.

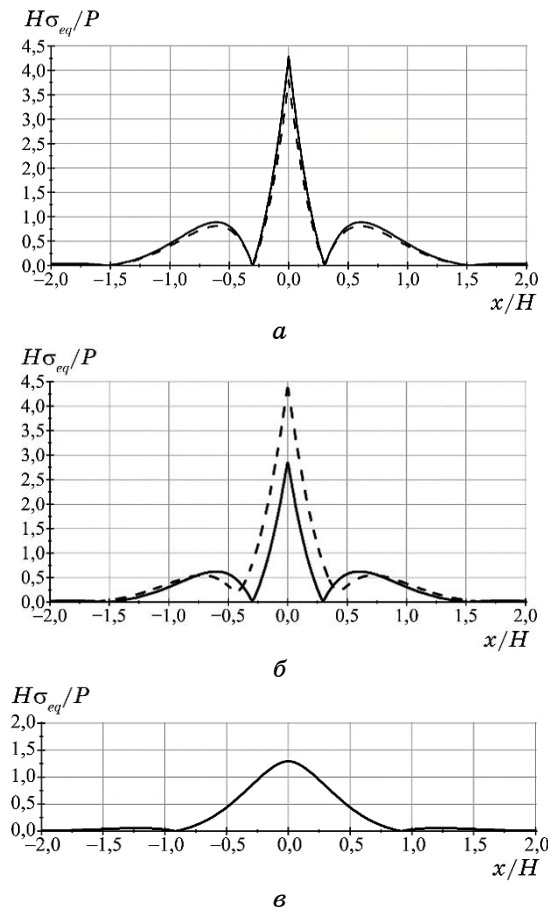
Далі подаємо приклад оцінювання напруженого та граничного станів тришарової композиції під локальним навантаженням. Вихідні дані для обчислення еквівалентних напружень  $\sigma_{eq}$  та коефіцієнта запасу міцності  $n = \sigma_Y/\sigma_{eq}$  наведено в таблиці, а результати розрахунків — на рис. 2–4.

Як видно з рисунків 2 та 3, напружений стан концентрується в околі лінії прикладання зосередженої сили, а найбільші еквівалентні напруження спостерігаються на нижній грані нікелевого шару (на лінії  $(x, y) = (0, h_{Cr} + h_{Ni} - 0)$ ).

Оскільки маємо справу з неоднорідним покриттям, то для оцінки його граничного стану треба також взяти до уваги просторовий розподіл характеристик міцності (у даному разі значення границь плинності кожного шару). Тому більш правильну характеристику граничного стану шаруватого покриття дає розподіл

**ТАБЛИЦЯ.** Механічні властивості шарів покриття.<sup>2</sup>

Характеристики шарів	Матеріал		
	Cr	Ni	Cu
$E$ , ГПа	280	210	110
$\nu$	0,21	0,3	0,35
$h$ , мкм	0,8	15	25
$\sigma_Y$ , МПа	370	450	210

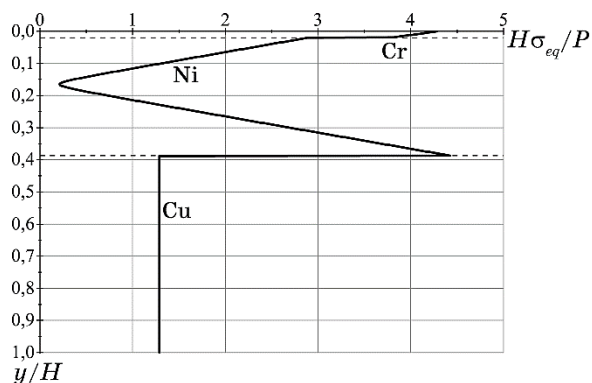


**Рис. 2.** Розподіл еквівалентних напружень вздовж граней шарів: *a* — Cr, *б* — Ni, *в* — Cu; суцільні лінії — для верхніх, а штрихові — для нижніх граней.<sup>3</sup>

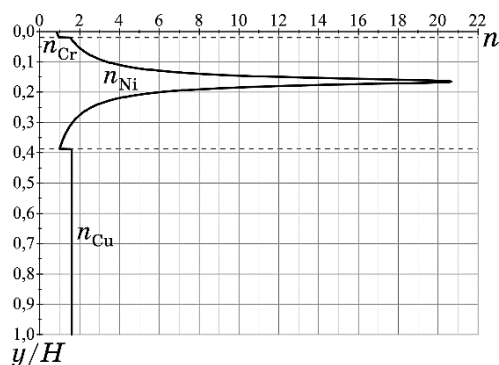
коефіцієнта запасу міцності (рис. 4). Незважаючи на те, що максимум еквівалентного напруження досягається в ніклевому шарі, гранична рівновага покриття найперше порушиться на поверхні хромового шару, там, де коефіцієнт запасу є найменшим.

#### 4. ВИСНОВКИ

Розвинута методика розрахунку уможливорює в аналітичній формі відстежувати вплив механічних і геометричних характеристик Cu/Ni/Cr-покриття на його напружений стан і граничну рівновагу під локальним навантаженням.



**Рис. 3.** Розподіл еквівалентних напружень по товщині тришарового покриття при  $x = 0$  (пунктиром відзначено ординати інтерфейсів).<sup>4</sup>



**Рис. 4.** Розподіл коефіцієнта запасу міцності по товщині тришарового покриття при  $x = 0$  (пунктиром відзначено ординати інтерфейсів).<sup>5</sup>

Показано, що граничний стан шаруватого покриття може досягатися не у місці максимуму еквівалентного напруження, а в місці мінімуму коефіцієнта запасу міцності.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА—REFERENCES

1. M. O. Vasyliiev, B. M. Mordyuk, S. I. Sidorenko, S. M. Voloshko, A. P. Burmak, and M. V. Kindrachuk, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **38**, No. 4: 545 (2016); <https://doi.org/10.15407/mfint.38.04.0545>
2. V. I. Kyryliv, V. I. Gurey, O. V. Maksymiv, I. V. Hurey, and Y. O. Kulyk, *Materials Science*, **57**, No. 3: 422 (2021); <https://doi.org/10.1007/s11003-021-00556-9>
3. V. V. Shyrokov, K. B. Vasyliv, Z. A. Duryahina, H. V. Laz'ko, and N. B. Rats'ka, *Materials Science*, **45**, No. 4: 473 (2009); <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9204-5>



4. F. I. Danilov, V. S. Protsenko, V. O. Gordiienko, S. C. Kwon, J. Y. Lee, and M. Kim, *Applied Surface Science*, **257**, No. 18: 8048 (2011); <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2011.04.095>
5. V. S. Protsenko, L. S. Bobrova, S. A. Korniy, A. A. Kityk, and F. I. Danilov, *Functional Materials*, **25**, No. 3: 539 (2018); <https://doi.org/10.15407/fm25.03.539>
6. A. Merlo and G. Léonard, *Materials*, **14**, No. 14: 3823 (2021); <https://doi.org/10.3390/ma14143823>
7. V. Kukhar, E. Klimov, and S. Chernenko, *Solid State Phenomena*, **316**: 873 (2021); <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.316.873>
8. V. I. Lavrinenko, A. G. Lubnin, V. M. Tkach, I. P. Fesenko, and V. V. Smokvyna, *Journal of Superhard Materials*, **43**, No. 2: 145 (2021); <https://doi.org/10.3103/S1063457621020088>
9. G. G. Gorokh, M. I. Pashechko, J. T. Borc, A. A. Lozovenko, I. A. Kashko, and A. I. Latos, *Applied Surface Science*, **433**: 829 (2018); <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2017.10.117>
10. O. I. Pylypenko, *Nanosistemi, Nanomateriali, Nanotehnologii*, **20**, No. 1: 111 (2022); <https://doi.org/10.15407/nnm.20.01.111>
11. L. Ropyak, T. Shihab, A. Velychkovych, V. Bilinskyi, V. Malinin, and M. Romaniv, *Ceramics*, **6**, No. 1: 146 (2023); <https://doi.org/10.3390/ceramics6010010>
12. V. B. Tarel'nyk, A. V. Paustovskii, Y. G. Tkachenko, E. V. Konoplianchenko, V. S. Martynovskiy, and B. Antoszewski, *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, **55**, Nos. 9–10: 585 (2017); <https://doi.org/10.1007/s11106-017-9843-2>
13. S. A. Klimenko, I. A. Podchernjaeva, V. M. Beresnev, V. M. Panasenko, S. An. Klimenko, and M. Yu. Kopeikina, *Journal of Superhard Materials*, **36**, No. 3: 208 (2014); <https://doi.org/10.3103/S1063457614030095>
14. V. S. Antonyuk, Y. Y. Bondarenko, S. O. Bilokin', V. O. Andrienko, and M. O. Bondarenko, *Journal of Nano- and Electronic Physics*, **11**, No. 6: 06024 (2019); [https://doi.org/10.21272/jnep.11\(6\).06024](https://doi.org/10.21272/jnep.11(6).06024)
15. V. A. Tatarenko, T. M. Radchenko, and V. M. Nadutov, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **25**, No. 10: 1303 (2003).
16. S. M. Bokoch, M. P. Kulish, V. A. Tatarenko, and T. M. Radchenko, *Metallofiz Noveishie Tekhnol.*, **26**, No. 4: 541 (2004).
17. P. Prisyazhnyuk, D. Lutsak, A. Vasylyk, S. Taer, and M. Burda, *Metallurgical and Mining Industry*, **7**, No. 12: 346 (2015).
18. Ya. Kusyi, V. Stupnytskyi, O. Onysko, E. Dragašius, S. Baskutis, and R. Chatys, *Eksploatacja i Niezawodność — Maintenance and Reliability*, **24**, No. 4: 655 (2022); <https://doi.org/10.17531/ein.2022.4.6>
19. Y. M. Kusyi and A. M. Kuk, *J. Phys. Conf. Ser.*, **1426**, No. 1: 012034 (2020); <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1426/1/012034>
20. W. Dai, C. Li, D. He, D. Jia, Y. Zhang, and Z. Tan, *Surface and Coatings Technology*, **380**: 125014 (2019); <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2019.125014>
21. V. B. Kopei, O. R. Onysko, and V. G. Panchuk, *J. Phys. Conf. Ser.*, **1426**, No. 1: 012033 (2020); <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1426/1/012033>
22. I. Yo. Popadyuk, I. P. Shats'kyi, V. M. Shopa, and A. S. Velychkovych, *Journal of Mathematical Sciences*, **215**: 243 (2016); <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2834-x>

23. O. Bazaluk, O. Dubei, L. Ropyak, M. Shovkoplias, T. Pryhorovska, and V. Lozynskiy, *Energies*, **15**, No. 1: 83 (2022); <https://doi.org/10.3390/en15010083>
24. M. Dutkiewicz, A. Velychkovych, I. Shatskyi, and V. Shopa, *Materials*, **15**, No. 13: 4671 (2022); <https://doi.org/10.3390/ma15134671>
25. T. P. Hovorun, O. V. Pylypenko, K. V. Berladir, K. O. Dyadyura, M. N. Dunaeva, S. I. Vorobiov, and A. Panda, *Functional Materials*, **26**, No. 3: 548 (2019); <https://doi.org/10.15407/fm26.03.548>
26. O. A. Goncharov, D. A. Belous, A. N. Yunda, A. V. Khomenko, E. V. Mironenko, L. V. Vasilyeva, and C. A. Goncharova, *Nanosistemi, Nanomateriali, Nanotehnologii*, **20**, No. 2: 385 (2022); <https://doi.org/10.15407/nnn.20.02.385>
27. Y. Liu, S. Yu, Q. Shi, X. Ge, and W. Wang, *Nanomaterials*, **12**, No. 9: 1388 (2022); <https://doi.org/10.3390/nano12091388>
28. M. Bembenek, O. Popadyuk, T. Shihab, L. Ropyak, A. Uhryński, V. Vytvytskyi, and O. Bulbuk, *Nanomaterials*, **12**, No. 14: 2413 (2022); <https://doi.org/10.3390/nano12142413>
29. V. A. Shevchuk, *Strength of Materials*, **32**: 92 (2000); <https://doi.org/10.1007/BF02511512>
30. D. Gay, *Composite Materials: Design and Application* (New York: CRC Press: 2014), p. 635; <https://doi.org/10.1201/b17106>
31. R. M. Tatsiy, O. Y. Pazen, S. Y. Vovk, L. Y. Ropyak, and T. O. Pryhorovska, *J. Serb. Soc. Comput. Mech.*, **13**, No. 2: 36 (2019); <https://doi.org/10.24874/jssem.2019.13.02.04>
32. I. P. Shatskii, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **30**: 828 (1989); <https://doi.org/10.1007/BF00851435>
33. I. P. Shatskii, *Journal of Mathematical Sciences*, **103**, No. 3: 357 (2001); <https://doi.org/10.1023/A:1011366312923>
34. S. Mohammadi, M. Yousefi, and M. Khazaei, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **40**: 3 (2020); <https://doi.org/10.1177/0731684420941602>
35. I. P. Shatskii, *J. Sov. Math.*, **67**: 3355 (1993); <https://doi.org/10.1007/BF01097747>
36. I. P. Shatskii, *J. Math. Sci.*, **76**: 2370 (1995); <https://doi.org/10.1007/BF02362900>
37. W. K. Ahmed and A.-H. I. Mourad, *J. Mech. Eng. Technol.*, **1**, No. 2: 66 (2013); <https://doi.org/10.18005/JMET0102005>
38. I. P. Shatskyi, M. V. Makoviichuk, and A. B. Shcherbii, *Proc. of Conf. 'Shell Structures: Theory and Applications' (October 11–13, 2017)* (Leiden: CRC Press: 2018), vol. 4, p. 165; <https://doi.org/10.1201/9781315166605-34>
39. I. Shats'kyi, M. Makoviichuk, and A. Shcherbii, *J. Math. Sci.*, **238**: 165 (2019); <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04226-9>
40. I. P. Shatskyi, M. V. Makoviichuk, and A. B. Shcherbii, *Mater. Sci.*, **55**: 484 (2020); <https://doi.org/10.1007/s11003-020-00329-w>
41. M. Dutkiewicz, T. Dalyak, I. Shatskyi, T. Venhrynyuk, and A. Velychkovych, *Applied Sciences*, **11**, No. 22: 10676 (2021); <https://doi.org/10.3390/app112210676>
42. I. P. Shatskyi, V. V. Perepichka, and L. Y. Ropyak, *Metallofiz Noveishie Tekhnol.*, **42**, No. 1: 69 (2020); <https://doi.org/10.15407/mfint.42.01.0069>
43. Yu. V. Milman, B. A. Galanov, and S. I. Chugunova, *Acta Metal. Mater.*,

- 41: 2523 (1993).
44. S. N. Dub and N. V. Novikov, *Journal of Superhard Materials*, No. 6: 16 (2004).
  45. L. Y. Ropyak, I. P. Shatskyi, and M. V. Makoviichuk, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **41**, No. 5: 647 (2019); <https://doi.org/10.15407/mfint.41.05.0647>
  46. L. Ya. Ropyak, I. P. Shatskyi, and M. V. Makoviichuk, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **39**, No. 4: 517 (2017); <https://doi.org/10.15407/mfint.39.04.0517>
  47. L. Y. Ropyak, M. V. Makoviichuk, I. P. Shatskyi, I. M. Pritula, L. O. Gryn, and V. O. Belyakovskiy, *Functional Materials*, **27**, No. 3: 638 (2020); <https://doi.org/10.15407/fm27.03.638>
  48. M. Bembenek, M. Makoviichuk, I. Shatskyi, L. Ropyak, I. Pritula, L. Gryn, and V. Belyakovskiy, *Sensors*, **22**, No. 21: 8105 (2022); <https://doi.org/10.3390/s22218105>
  49. J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis* (CRC Press: 2004), p. 854.
  50. O. Y. Dubei, T. F. Tutko, L. Y. Ropyak, and M. V. Shovkopliias, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **44**, No. 2: 251 (2022); <https://doi.org/10.15407/mfint.44.02.0251>

---

<sup>1</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics, N.A.S. of Ukraine, 3, Mykytynetska Str.,*

*UA-76002 Ivano-Frankivsk, Ukraine*

<sup>2</sup>*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 15, Karpatska Str.,*

*UA-76019 Ivano-Frankivsk, Ukraine*

<sup>1</sup> Fig. 1. Scheme of three-layer Cu/Ni/Cr coating under local load.

<sup>2</sup> TABLE. Mechanical properties of layers.

<sup>3</sup> Fig. 2. Distribution of equivalent stress along the faces of the layers:  $a$ —Cr,  $b$ —Ni,  $c$ —Cu; solid lines are for the upper faces, and dashed lines are for the lower faces.

<sup>4</sup> Fig. 3. Distribution of equivalent stress over the thickness of the three-layer coating at  $x = 0$  (the ordinates of the interfaces are marked with dashed lines).

<sup>5</sup> Fig. 4. Distribution of the safety factor over the thickness of the three-layer coating at  $x = 0$  (the ordinates of the interfaces are marked with dashed lines).